Test 2 – Sujet B

Résoudre **les deux** exercices suivants.

Exercice 1 (Matrices)

(i) Calculer le produit AB des deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) On considère l'application linéaire suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+3y, -x+y) \end{array}.$$

Déterminer la matrice associée à f. Si elle existe, calculer la matrice inverse de cette dernière.

(iii) En utilisant la question précédente, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 (Géométrie dans le plan)

Dans le plan, on considère les points $A(-1, 2)$ et $B(3, -1)$.

(i) Déterminer une équation de la droite Δ passant par A et B.

(ii) Déterminer une équation de la droite Δ' perpendiculaire à Δ et passant par le point $C(0, -1)$.

Test 2 – Sujet B

NOM et PRÉNOM (lisibles) :

Résolution des exercices

Test 2 – Sujet B

Corrigé du test

Exercice 3 (Matrices)

(i)

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -7 & -1 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}$$

(ii) La matrice associée à f est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est $1 \times 1 - (-1) \times 3 = 4 \neq 0$, donc M est inversible et son inverse est

$$M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) On a

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases} \iff M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donc l'unique solution du système est $x = -\dfrac{1}{4}$ et $y = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 4 (Géométrie dans le plan)

(i) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, qui a pour coordonnées $(3 - (-1), -1 - 2) = (4, -3)$, est un vecteur directeur de la droite Δ. On a donc une équation de Δ de la forme

$$-3x - 4y + c = 0,$$

où $c \in \mathbb{R}$. De plus, $A \in \Delta$, donc $-3 \times (-1) - 4 \times 2 + c = 0$, i.e. $c = 5$. Une équation de Δ est donc

$$-3x - 4y + 5 = 0.$$

(ii) Comme Δ' est perpendiculaire à Δ, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à Δ', et donc on a une équation de Δ' de la forme

$$4x - 3y + c = 0,$$

avec $c \in \mathbb{R}$. De plus, $C \in \Delta'$, i.e. $4 \times 0 - 3 \times (-1) + c = 0$, i.e. $c = -3$. Une équation de Δ' est donc

$$4x - 3y - 3 = 0.$$